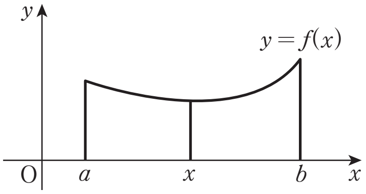
PART3　x 軸の周りの回転体の体積

要点整理と公式

要点 ①　x 軸の周りの回転体の体積

$a<b$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V とする。



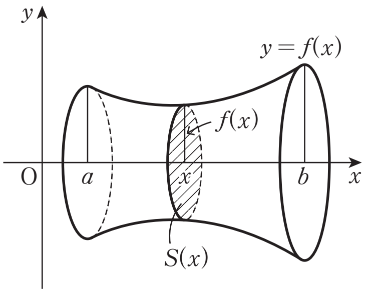
点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面による断面は　　となり，その断面積 $S(x)$ は

$$S(x)=$$

となる。よって，

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \qquad dx$$

となる。したがって，次の公式が得られる。



x 軸の周りの回転体の体積

$a<b$ のとき

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

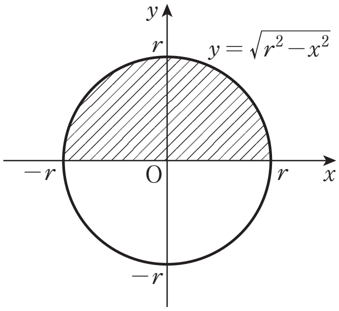
(ex) 半径 r の球の体積 V について

半径 r の球は，半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体と考えることができる。よって

$$V=\int \qquad dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$

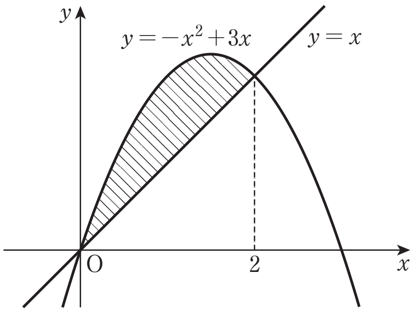
$$=2\pi\int_0^r (r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{4}{3}\pi r^3$$



要点 ② x 軸の周りの回転体の体積（2曲線間）

放物線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求める。



$-x^2+3x=x$ より　$x(x-2)=0$　　$x=0$，2

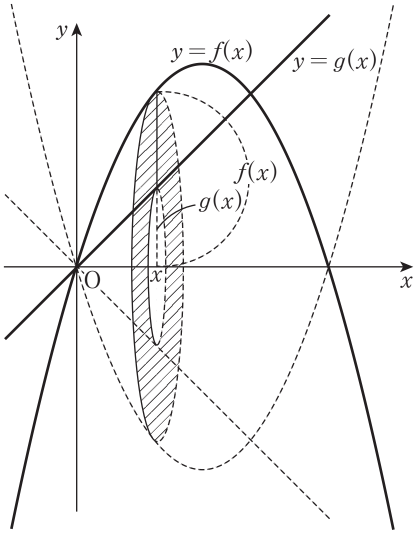
$0 \leqq x \leqq 2$ においては $0 \leqq x \leqq -x^2+3x$

ここで，$f(x)=-x^2+3x$，$g(x)=x$ とする。

点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面による立体の断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)= \qquad\qquad -$$

である。よって，求める体積は



$$V=\pi\int_0^2\{f(x)\}^2\,dx-\pi\int_0^2\{g(x)\}^2\,dx$$

$$=\int_0^2\left[\qquad\qquad - \qquad\qquad\right]dx$$

$$=\pi\int_0^2\{(-x^2+3x)^2-x^2\}dx$$

$$=\pi\int_0^2(x^4-6x^3+8x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{8}{3}x^3\right]_0^2=\left(\frac{32}{5}-24+\frac{64}{3}\right)\pi=\frac{56}{15}\pi$$

3　次の曲線や直線で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{3}$，x 軸　　(2)　$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$

Point Pickup

x 軸の周りの回転体の体積

曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は，断面が円になることに注目し

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx \qquad (a<b)$$

で求めることができる。

第21講 PART3 確認問題

1 曲線 $y=e^x$ と x 軸，y 軸および直線 $x=3$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は，

$$\frac{\pi}{\boxed{ア}}\left(e^{\boxed{イ}}-\boxed{ウ}\right)$$

である。

2 2曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\sqrt{2x}$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積は，

$$\frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}\pi$$

である。

PART3　x 軸の周りの回転体の体積

3　次の曲線や直線で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{3}$，x 軸　　　(2)　$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$

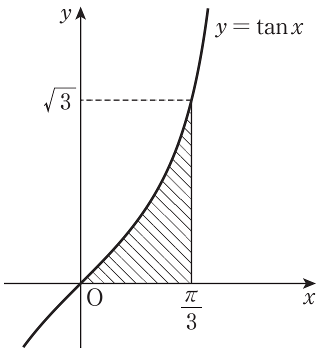
[解答]

(1)　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\pi\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\pi\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$



(2)　$x^2=\sqrt{x}$ より $x^4=x$　　$x(x^3-1)=0$　　$x=0$，1

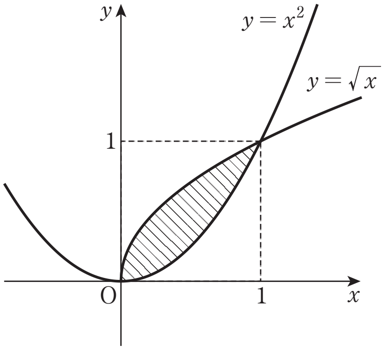
$0\leqq x\leqq 1$ においては $0\leqq x^2\leqq\sqrt{x}$

$V=\pi\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x})^2dx-\pi\int_0^1(x^2)^2dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1\{(\sqrt{x})^2-(x^2)^2\}dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1(x-x^4)dx$

$=\pi\left[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{5}x^5\right]_0^1=\dfrac{3}{10}\pi$



第21講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：6，ウ：1

[解説]

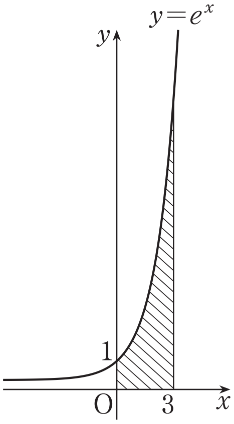
求める立体の体積は，

$$\pi\int_0^3 (e^x)^2\,dx$$ [A]

$$=\pi\int_0^3 e^{2x}\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^6-1)}$$



[A]　x 軸の周りの回転体の体積
曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

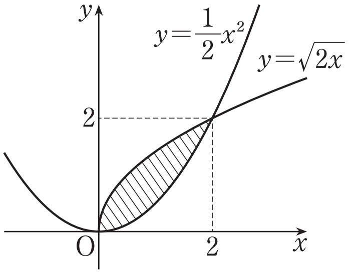
2 [正解] エオ：12，カ：5

[解説]

$\frac{1}{2}x^2=\sqrt{2x}$ より，$\frac{1}{4}x^4=2x$

$$x(x^3-8)=0$$

$$x=0,\ 2$$



[B]

$0\leqq x\leqq 2$ においては，

$$\sqrt{2x}\geqq\frac{1}{2}x^2\geqq 0$$

求める立体の体積は，

$$\pi\int_0^2(\sqrt{2x})^2\,dx-\pi\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx \quad \text{[C]}$$

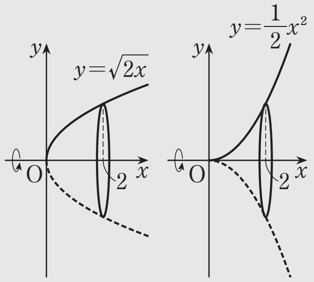
$$=\pi\int_0^2\left(2x-\frac{1}{4}x^4\right)dx$$

$$=\pi\left[x^2-\frac{1}{20}x^5\right]_0^2$$

$$=\pi\left(4-\frac{8}{5}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{12}{5}\pi}$$

[B]



2 つの回転体の体積の差を求める。

[C]　2 曲線 $f(x)$，$g(x)$ に囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面による断面積 $S(x)$ は，

$$S(x)=\pi\{f(x)\}^2-\pi\{g(x)\}^2$$

ただし，$f(x)\geqq g(x)\geqq 0$